OCJENA KVALITETA NUMERIČKOG RJEŠENJA NA PRIMJERU KONZOLNOG NOSAČA

QUALITY EVALUATION OF NUMERICAL SOLUTION ON THE EXAMPLE OF CANTILEVER BEAM

v. as. mr. Emir Đulić
Univerzitet u Zenici
Zenica
Bosna i Hercegovina

v. as. mr. Nermin Redžić
Univerzitet u Zenici
Zenica
Bosna i Hercegovina

v. as. mr. Vahid Redžić
Univerzitet u Zenici
Zenica
Bosna i Hercegovina

REZIME
Matematičko modeliranje predstavlja matematički opis modela (modeliran realni sistem) kreiranog na osnovu odgovarajućih fizičkih zakona. Odstupanja između ponašanja modela i realnog sistema predstavlja tačnost modela. Analitička rješenja parcijalnih diferencijalnih jednačina sadrže izraze u zatvorenoj formi što daje kontinualnu promjenu zavisnih varijabli preko cjelokupnog domena, dok s druge strane, rješenja dobijena numeričkim putem predstavljaju odgovore samo u diskretnim tačkama domena koje se nazivaju tačke mreže. U radu je razmatran analitički i numerički pristup određivanja ugiba za proizvoljno odabrani konzolni nosač, te izvršena komparativna analiza dobijenih vrijednosti dva modela. Predstavljeni pristup rješavanja konkretnog problema može služiti kao uzorni model za slične probleme u klasi sistema.

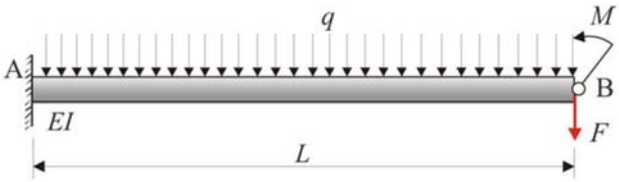
Ključne riječi: konzola, ugib, analitičko rješenje, numeričko rješenje, ocjena kvaliteta rješenja

ABSTRACT
Mathematical modeling is a mathematical description of a model (modeled real system) created on the basis of appropriate physical laws. Deviations between the behavior of the model and the real system represent the accuracy of the model. Analytical solutions of partial differential equations contain expressions in closed form, which gives a continuous change of dependent variables over the entire domain. On the other hand, numerical solutions represent answers only at discrete domain points called mesh nodes. The paper discusses the analytical and numerical approach to determining the value of deflection for an arbitrarily selected cantilever beam. Also, a comparative analysis of the obtained values of the two models was performed. The presented approach to solving a specific problem can serve as a model for similar problems in the system class.

Keywords: cantilever beam, deflection, analytical solution, numerical solution, solution quality assessment

1. OPIS PROBLEMA KOJI SE RJEŠAVA

Često se u poslovima projektovanja konstrukcija dešava da je kriterijum maksimalno dozvoljenih deformacija (kriterij graničnog stanja upotrebljivosti) mjerodavan za dimenzionisanje konstrukcije. Ovaj uslov se uglavnom iskazuje kroz maksimalne vrijednosti pomjeranja karakterističnih tačaka strukture pri djelovanju maksimalnog radnog opterećenja. Nedovoljna krutost nosive konstrukcije, tokom rada, može dovesti do pojave prekomjernog deformisanja i pojave dopunskih statičkih i dinamičkih opterećenja. Ovo dalje vodi ka smanjenju operativne pouzdanosti i/ili skraćivanju vijeka trajanja podsklopova ili cijele konstrukcije (mašine). Dakle, ograničavanje deformisanja nosive konstrukcije garantuje dobre eksploatacione karakteristike i dug vijek konstrukcije. U ovom radu se razmatra deformacija konzolne grede čija je krutost na savijanje **EI**, usljed djelovanja linijskog opterećenja **q**, koncetrične sile **F** te koncetričnog momenta **M** na slobodnom kraju (slika 1.). Pod djelovanjem spomenutih opterećenja greda se savija usljed čega se njena osa pomjera iz svog prvobitnog položaja. Pomjeranje tačaka ose grede nazivaju se ugibi grede, deformisana osa grede naziva se ugibna linija grede. Ugib grede najvećim dijelom je prouzrokovan momentom savijanja, dok je uticaj transverzalne sile veoma mali i u najvećem broju slučajeva se zanemaruje pri proračunu.



Slika 1. Konzolni nosač

Za konkretni zadatak, matematički model će se riješiti analitički i numerički, te će se na kraju prikazati dijagrami ugiba razmatrane konzolne grede, a za potrebe proračuna usvojene su i konkretne vrijednosti:

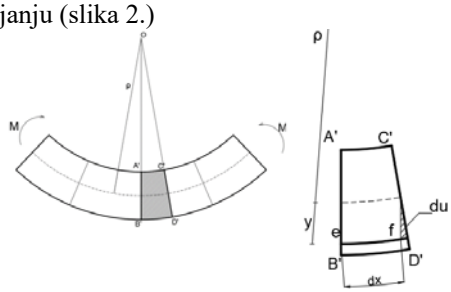
$$\mathrm{L} = 4\ [\mathrm{m}];\ \mathrm{q} = 10\left[\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}\right];\ \mathrm{F} = 40\ [\mathrm{kN}];\ \mathrm{M} = 50\ [\mathrm{kNm}];\ \mathrm{EI} = 20\ 000\ [\mathrm{kNm}^2]$$

2. MATEMATIČKI MODEL PROBLEMA

Teorija deformacije grede zasnovana je na osnovnoj zakonitosti „klasične“ teorije savijanja koja glasi: Ravni presjeci okomiti na osovinu grede ostaju ravni i okomiti na osovinu i nakon savijanja. Utvrđeno je da se ova hipoteza može primijeniti sa velikom tačnošću, bez obzira da li se materijal grede ponaša elestično ili neelastično, pod uslovom da je visina grede mala u odnosu na raspon.

2.1. Diferencijalna jednačina ugibne linije grede

Da bismo izveli izraze za određivanje deformacije grede, razmotrimo deformisani segment grede izložen čistom savijanju (slika 2.)



Slika 2. Segment konzole izložen čistom savijanju

Mjeru deformacije grede prouzrokovane momentom savijanja predstavlja zakrivljenost (krivina) neutralne površine, odnosno osovine štapa. Kao što je poznato, krivina se definiše kao recipročna vrijednost radijusa zakrivljenosti $\boldsymbol{\rho}$. Veza između radijusa zakrivljenosti osovine grede i dilatacije (relativne deformacije) proizvoljnog podužnog vlakna grede data je u sljedećem obliku:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon_x}{y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

U području elastičnih deformacija je

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Pri čemu iz formule savijanja slijedi

$$\sigma_x = -\frac{M}{I} \cdot y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Ako u jednačinu (1) uvrstimo (2) i (3) dobijamo da je

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{E \cdot I} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Na ovaj način je uspostavljena direktna veza između veličine momenta savijanja i zakrivljenosti deformisane osovine grede, odnosno zakrivljenosti ugibne linije. Pošto se radi o gredi koja se deformiše elastično, ugibna linija se obično naziva **elastična linija.** Jednačina (4) važi i kada je savijanje grede izazvano poprečnim opterećenjima, samo što se sada moment savijanja i krivina osovine grede mijenjaju od presjeka do presjeka.

Uzevši to u obzir, jednačina krivine grede glasi:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{E \cdot I} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Poznato je iz analitičke geometrije da je zakrivljenost linije u pravougaonom koordinatnom sistemu definisana na sljedeći način:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + (\frac{dy}{dx})^2\right]^{\frac{3}{2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

gdje su x i y koordinate tačke na liniji. U odnosu na problem koji razmatramo, x određuje tačku na osovini grede, a y je ugib te iste tačke. U skladu sa konvencijom, pomjeranje u pravcu osovine y označimo sa v, pa onda jednačinu (6) pišemo:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{\frac{3}{2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Ako jednačinu (7) uvrstimo u jednačinu (5) dobićemo egzaktnu diferencijalnu jednačinu elastične (ugibne) linije. U opštem slučaju, međutim ovu jednačinu je veoma teško riješiti, pa se u mehanici umjesto tačnog izraza za krivinu koristi znatno pojednostavljen izraz. Naime, u većini inženjerskih problema dozvoljavaju se veoma male deformacije, pa je onda i nagib ugibne linije $\frac{dy}{dx}$, također mala veličina čiji se kvadrat može zanemariti u odnosu na jedinicu u nazivniku izraza za krivinu datog jednačinom (7), tj. možemo napisati:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Sa gore uvedenim pojednostavljenjem, diferencijalna jednačina ugibne linije grede glasi:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{E \cdot I} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

Pri izvođenju diferencijalne jednačine (9) držali smo se uobičajene orijentacije koordinatnih osa. Prema tome, pozitivna zakrivljenost grede podudara se sa zakrivljenošću koju izaziva pozitivan moment savijanja, ali je zato ugib grede koji izaziva opterećenje koje djeluje odozgo – nadole negativan. Izraz (9) zapravo predstavlja <u>linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima.</u>

3. RJEŠENJE MATEMATIČKOG MODELA

3.1. Rješenje pomoću graničnih uslova

Savojna krutost $EI = 20\,000$ [kNm^2]

Uslovi ravnoteže:

$$\sum y = 0 \dots\dots\dots R_A - 10 \cdot 4 - 40 = 0 \;\; \rightarrow R_A = 80 \text{ [kN]}$$

$$\sum M_B = 0 \dots\dots\dots M_A - R_A \cdot 4 + 10 \cdot 4 \cdot 2 + 50 = 0 \;\; \rightarrow M_A = 190 \text{ [kNm]}$$

Na osnovu jednačine (9) možemo napisati:

$$EI \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = M(x) \dots\dots\dots\dots (10)$$

pri čemu je moment savijanja u proizvoljnom presjeku x:

$$M(x) = R_A \cdot x - M_A - 10 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 80x - 190 - 5x^2$$

$$M(x) = -5x^2 + 80x - 190$$

Pri tome možemo pisati:

$$EI \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = -5x^2 + 80x - 190$$

Da bismo dobili jednačinu ugiba grede, gornji izraz ćemo integraliti dva puta

$$EI \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{5}{3}x^3 + 40x^2 - 190x + C_1$$

$$EI \cdot v = -\frac{5}{12}x^4 + \frac{40}{3}x^3 - 95 \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2$$

Dvije konstante integracije C_1 i C_2 odredićemo iz graničnih uslova, koji u ovom slučaju glase:

$$x = 0 \;\; \rightarrow \;\; v' = 0 \;\; i \;\; v = 0$$

$$EIv' = -\frac{5}{3} \cdot 0^3 + 40 \cdot 0^2 - 190 \cdot 0 + C_1 = 0 \;\; \rightarrow C_1 = 0$$

$$EI \cdot v = -\frac{5}{12} \cdot 0^4 + \frac{40}{3} \cdot 0^3 - 95 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 \;\; \rightarrow C_2 = 0$$

Jednačina ugibne linije sada glasi:

$$v = \frac{5 \cdot x^2}{EI}\left(-\frac{x^2}{12} + \frac{8x}{3} - 19\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Ugibi u tačkama grede (slika 3.) iznose:

$$v(x = 0) = 0$$
$$v(x = 1) = \frac{5 \cdot 1^2}{20000}\left(-\frac{1^2}{12} + \frac{8 \cdot 1}{3} - 19\right) = -0{,}00408[\mathrm{m}]$$
$$v(x = 2) = \frac{5 \cdot 2^2}{20000}\left(-\frac{2^2}{12} + \frac{8 \cdot 2}{3} - 19\right) = -0{,}014[\mathrm{m}]$$
$$v(x = 3) = \frac{5 \cdot 3^2}{20000}\left(-\frac{3^2}{12} + \frac{8 \cdot 3}{3} - 19\right) = -0{,}02643[\mathrm{m}]$$
$$v(x = 4) = \frac{5 \cdot 4^2}{20000}\left(-\frac{4^2}{12} + \frac{8 \cdot 4}{3} - 19\right) = -0{,}03866[\mathrm{m}]$$

Ugib slobodnog kraja konzole iznosi $v_{max} = 38{,}66$ [mm]

3.2. Određivanje rješenja pomoću Laplace – ovih transformacija

Rješavamo sljedeću diferencijalnu jednačinu:

$$EI \cdot v'' = -5x^2 + 80x - 190$$

Potražićemo Laplace-ovu transformaciju funkcije $v(x)$

$$\mathcal{L}(EIv'') = \mathcal{L}(-5x^2 + 80x - 190)$$
$$EI \cdot \mathcal{L}(v'') = -\mathcal{L}(5x^2) + \mathcal{L}(80x) - \mathcal{L}(190)$$
$$EI \cdot [s^2V - sV(0) - V'(0)] = -5 \cdot \frac{2!}{s^3} + 80 \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{190}{s}$$

Ugib i nagib grede na mjestu uklještenja jednaki su nuli, odnosno

$$v(0) = v'(0) = 0$$

Prema tome možemo napisati:

$$EI \cdot s^2V = -\frac{10}{s^3} + 80 \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{190}{s}$$
$$EI \cdot V = -\frac{10}{s^5} + 80 \cdot \frac{1}{s^4} - \frac{190}{s^3}$$

Sada ćemo potražiti inverznu Laplace-ovu transformaciju:

$$EI \cdot V = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{10}{s^5} + \frac{80}{s^4} - \frac{190}{s^3}\right)$$
$$EI \cdot V = -10 \cdot \frac{x^4}{4!} + 80 \cdot \frac{x^3}{3!} - 190 \cdot \frac{x^2}{2!}$$
$$EI \cdot V = -10 \cdot \frac{x^4}{24} + 80 \cdot \frac{x^3}{6} - 190 \cdot \frac{x^2}{4}$$
$$EI \cdot V = -5 \cdot \frac{x^4}{12} + 40 \cdot \frac{x^3}{3} - 95 \cdot x^2$$
$$v = \frac{5x^2}{EI}\left(-\frac{x^2}{12} + \frac{8x}{3} - 19\right)$$

Rješenje za ugibnu liniju konzole je identično izrazu (11) prikazanom u prethodnom poglavlju.

3.3. Metoda konačnih razlika

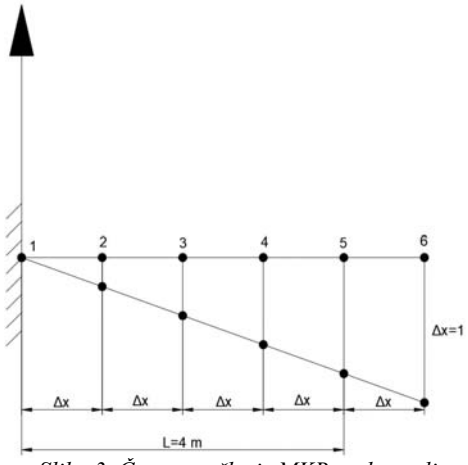
Pri rješavanju diferencijalne jednačine ugibne linije grede koristićemo podjelu na četiri intervala pri čemu je $\Delta x = 1$ [m]

Diferencijalna jednačina glasi:

$EIv'' = -5x^2 + 80x - 190 \ldots\ldots\ldots\ldots..(12)$

Izvod funkcije u $k - toj$ tački određujemo na osnovu izraza:

$$v_{k''} = \frac{v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}}{\Delta x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots..(13)$$



Slika 3. Čvorne tačke iz MKR na konzoli

Ugib u tački 1 jednak je nuli, tj. $v_1 = 0$. Za tačke na gredi 2,3,4,5 i 1 prema izrazu (13) i diferencijalnoj jednačini (12), slijedi:

$$k = 2 \;\rightarrow\; EI \cdot \frac{v_3 - 2v_2 + v_1}{1^2} = -5 \cdot 1^2 + 80 \cdot 1 - 190$$

$$v_3 - 2v_2 = \frac{-105}{EI}$$

$$k = 3 \;\rightarrow\; EI \cdot \frac{v_4 - 2v_3 + v_2}{1^2} = -5 \cdot 2^2 + 80 \cdot 2 - 190$$

$$v_4 - 2v_3 + v_2 = \frac{-50}{EI}$$

$$k = 4 \;\rightarrow\; EI \cdot \frac{v_5 - 2v_4 + v_3}{1^2} = -5 \cdot 3^2 + 80 \cdot 3 - 190$$

$$v_5 - 2v_4 + v_3 = \frac{5}{EI}$$

$$k = 5 \;\rightarrow\; EI \cdot \frac{v_6 - 2v_5 + v_4}{1^2} = -5 \cdot 4^2 + 80 \cdot 4 - 190$$

$$v_6 - 2v_5 + v_4 = \frac{50}{EI}$$

$$k = 1 \;\rightarrow\; EI \cdot \frac{v_2 - 2v_1 + v_0}{1^2} = -5 \cdot 0^2 + 80 \cdot 0 - 190$$

$$v_2 + v_0 = \frac{-190}{EI}$$

Vrijednosti ugiba v_0 i v_2 prema slici 4, jednaki su, tjs. $v_0 = v_2$
Sistem algebarskih jednačina glasi:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
k=1 & & & 2v_2 & & & & & & & & & = & -0{,}0095 \\
k=2 & & - & 2v_2 & + & v_3 & & & & & & & = & -0{,}00525 \\
k=3 & & & v_2 & - & 2v_3 & + & v_4 & & & & & = & -0{,}0025 \\
k=4 & & & & & v_3 & - & 2v_4 & + & v_5 & & & = & +0{,}00025 \\
k=5 & & & & & & & v_4 & - & 2v_5 & + & v_6 & = & +0{,}00025
\end{array}
$$

U matričnom obliku:

$$
\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}0095 \\ -0{,}00525 \\ -0{,}0025 \\ 0{,}00025 \\ 0{,}00025 \end{vmatrix}
$$

Rješavanjem sistema jednačina dobijamo ugibe tačaka od 2 do 6:
$v_2 = 0{,}00475\ [m]$ $\quad$ $v_3 = -0{,}01475$ [m]
$v_4 = -0{,}02725\ [m]$ $\quad$ $v_5 = -0{,}0395$ [m]
$v_6 = -0{,}04925\ [m]$ $\quad$ $tačka\ izvan\ nosača$
$v_1 = 0 - presjek\ u\ uklještenju$
Ugib slobodnog kraja konzole iznosi $\boldsymbol{v_{max} = v_5 = 39{,}5}$ **[mm]**

4. ZAKLJUČAK

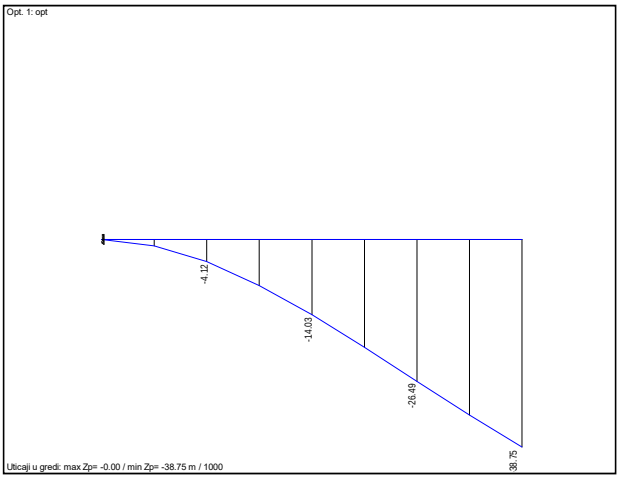
Rezultati ugiba dobijeni u prethodnim poglavljima su tabelarno komparirani:

Tabela 1. Komparacija rješenja

Tačka	Analitičko rješenje	Metod konačnih razlika
2	4,08 mm	4,75 mm
3	14,00 mm	14,75 mm
4	26,43 mm	27,25 mm
5	38,66 mm	39,5 mm

Upoređujući dobijene rezultate da se uočiti izvjesna razlika u vrijednostima ugiba konzolne grede. Razlog leži u činjenici da je numerička metoda konačnih razlika približna metoda proračuna, dok je prvi rezultat dobijen na osnovu egzaktnog rješenja Lapalace-ovom transformacijom i integracijom. Tačniji rezultati se mogu dobiti smanjenjem intervala Δx koji je u ovom primjeru usvojen $\Delta x = 1\ [m]$. Međutim, s druge strane to će uveliko povećati broj jednačina čije je rješavanje kompleksnije. Dakle numeričko rješavanje sadrži proces diskretizacije preko kojeg se zatvoreni matematički izrazi kao što su funkcije ili diferencijalne ili integralne jednadžbe koje sadrže funkcije i gdje se sve one vide kao beskonačni kontinuum vrijednosti preko cjelokupnog intervala, aproksimiraju analognim (ali različitim) izrazima koji pridodjeljuju vrijednosti u samo konačnom broju diskretnih tačaka ili volumena u domenu.

Kvalitet rješenja je potvrđen i odgovarajućim softverom, kojim smo izračunali vrijednosti ugiba prethodno određenih (slika 4.)



Slika 4. Ugibi određeni pomoću softvera Tower 8.4 od firme Radimpex Beograd

5. REFERENCE

[1] Akai, T. J.; Applied Numerical Methods for Engineers, John Wiley & Sons

[2] Schäfer, M; Computational Engineering – Introduction to Numerical Methods, Springer, 2006.

[3] Gotovac, B.; Gusić, G.; Implementation of the analytical solutions in the finite element method, International Journal for Engineering Modelling, Vol. 5, No. 3-4, pp. 107-111, Faculty of Civil Engineering University of Split, Split, 1992 Wieregge, G.: Zerspanung der Eisenwerkstoffe, Verlag Stahleisen m.b.H. Düsseldorf, 1970.

[4] Demirdžić, I.; Predavanja iz Mehanike kontinuuma, Mašinski fakultet u Sarajevu, 1998.

[5] Gašić, M.; Savković, M.; Bulatović, R.; Petrović, R.; Optimization of a pentagonal cross section of the truck crane boom using Lagrange's multipliers and differential evolution algorithm, Meccanica, Vol. 46, pp. 845–853., 2011.

[6] Zdravković, N.; Savković, M.; Marković, G.; Pavlović, G.; Primena metode konačnih razlika kod određivanja ugiba nosača kontinualno promenljivog poprečnog preseka – MK-14 – Istraživanje i razvoj u teškoj mašinogradnji 26(2020)1, SR 19-23 UDC 621 ISSN 0354-6829

[7] Verbič, B.; Otpornost materijala, Građevinski fakultet u Sarajevu, 1989. godine