MOGUĆNOSTI INOVACIJE U NASTAVI MATEMATIKE KORIŠTENJEM ELEMENATA TEORIJE GRAFOVA

POSSIBILITIES OF INNOVATION IN TEACHING MATHEMATICS USING THE ELEMENTS OF GRAPH THEORY

Almir Huskanović, Univerzitet u Zenici

Hermina Alajbegović, Univerzitet u Zenici

REZIME
Teorija grafova je moćan alat za rješavanje problema, prvenstveno iz oblasti kombinatorike i logičkih zadataka, ali nije uvrštena u kurikulume škola u Bosni i Hercegovini. Ovaj rad prikazuje neke od mogućnosti i prednosti korištenja ove teorije u nastavi matematike.
Ključne riječi: nastava matematike, teorija grafova, logičko-kombinatorni problemi

ABSTRACT
Graph theory is a powerful problem-solving tool, primarily in the field of combinatorics and logical tasks, but it is not included in the present curriculum at Bosnia and Herzegowina's schools. This paper presents some of the possibilities and advantages of using this theory in teaching mathematics.
Keywords: teaching mathematics, graph theory, logic-combinatorial problems

1. UVOD

Teorija grafova, kao jedna od relativno mlađih matematičkih disciplina zasnovana je na pojmu grafa. Svaki graf sadrži vrhove i ivice. Konkretno, graf se u matematici definiše kao uređeni par (V, E), gdje je V skup vrhova (čvorova) grafa, a E je skup ivica. Najčešće ga označavamo slovom G ili Γ. Vrhove obilježavamo malim slovima latinice, npr. $a, b, c, x, y, z, ...$ ili brojevima 1 2, 3, ..., a svaka ivica e je određena sa po dva vrha, npr. x i y, pa tada pišemo: $e = \{x, y\}$ ili $e = xy$. Ako ta ivica pripada grafu G, kažemo da su vrhovi x i y susjedni u grafu G i da je ivica e incidentna sa tim vrhovima, odnosno da su vrhovi x i y krajevi ivice e. Pod stepenom nekog vrha v podrazumijevamo broj njemu susjednih vrhova, u oznaci $d(v)$. Ako je $d(v) = k$ za svaki vrh v u grafu G, kažemo da je taj graf k −regularan. Grafovi se mogu predstaviti crtežom na kome su vrhovi prikazani tačkama ili kružićima, a ivice linijama koje spajaju odgovarajuće vrhove. U slučaju tzv. jednostavnog grafa, krajevi svake ivice su uvijek dva različita vrha, tj. nijedan vrh nije povezan sa samim sobom (tada imamo tzv. petlju) i dva vrha grafa ne mogu biti spojena sa više od jedne ivice.

Logičko-kombinatorni zadaci u matematici su često teški za rješavanje, pa pokušavamo naći načine koji će olakšati njihovo rješavanje. Za rješavanje nekih od zadataka logičko-kombinatornog tipa zgodno je iskoristiti elemente teorije grafova jer se tada može nacrtati slika odgovarajućeg grafa i riješiti problem svodeći ga na poznate osobine grafova.

2. LEMA O RUKOVANJU

Osim poznavanja definicije i osnovnih pojmova kod grafova, te nekih poznatih vrsta grafova kao što su kompletni graf, linijski graf, ciklus, bipartitni i dr. (vidi [1], [2] ili [8]), u rješavanju logičko-kombinatornih zadataka često nam zatreba sljedeća tvrdnja:

Lema 1: Zbir stepena svih vrhova grafa jednak je dvostrukom broju ivica tog grafa.

Dokaz: Ako je $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ skup svih vrhova datog grafa, tada je zbir

$$S = d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2m,$$

gdje je m broj ivica grafa, jer svaka ivica ima dva vrha pa je u zbiru S svaka ivica prebrojana dva puta. ■

Posljedica: U svakom grafu je broj vrhova neparnog stepena paran broj.

Ekvivalentni iskaz zadnje tvrdnje je poznat kao Lema o rukovanju, prema kojoj broj ljudi u nekom društvu koji su se rukovali neparan broj puta mora biti paran broj.

Primjer 1: Da li je moguće da u skupini od 29 ljudi svaki od njih bude prijatelj sa tačno sedmero njih iz te skupine?

Da bismo riješili ovaj zadatak potrebno je uvesti graf G na način da pretpostavimo da on ima 29 vrhova (dakle svakoj osobi pridružujemo jedan vrh grafa), a dva vrha su susjedna ako su odgovarajuće osobe prijatelji. Na taj način imali bismo graf kod koga svi vrhovi imaju stepen 7, što je nemoguće. Dakle, odgovor na pitanje iz zadatka je negativan.

Primjer 2: U ligi koja se sastoji od dvije grupe sa po 15 timova u svakoj grupi, odrediti da li je moguće napraviti raspored utakmica u sezoni tako da svaki tim odigra 11 utakmica protiv timova iz svoje grupe i dvije utakmice protiv timova iz suprotne grupe.

Radeći slično kao u prošlom primjeru, formirali bismo graf koji ima 30 vrhova (tj. svakom timu u ligi odgovara jedan vrh grafa). Dva vrha u tom grafu su međusobno susjedni ako odgovarajući timovi igraju utakmicu. Na prvi pogled, takav graf bi bio moguć jer imamo 30 vrhova koji su svi stepena 13. No da bismo dokazali da takav graf ipak nije moguće nacrtati, potrebno je poznavati pojam podgrafa datog grafa.

Definicija: Kažemo da je graf $G' = (V', E')$ podgraf grafa $G = (V, E)$ ako je $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$.

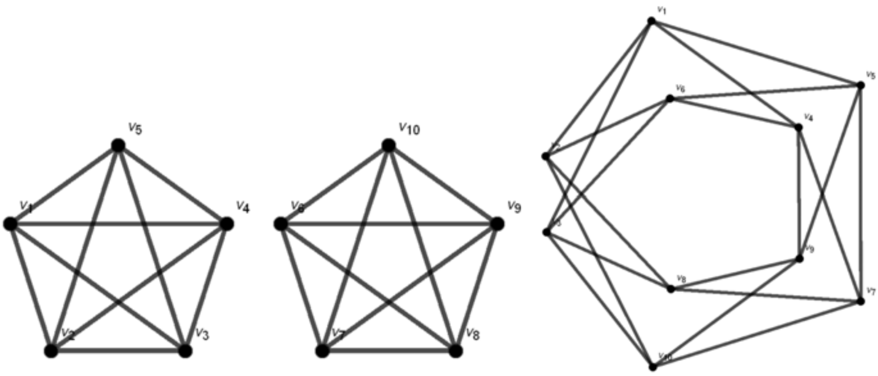
Jasno je da je svaki podgraf nekog grafa takođe graf. Zato ukoliko se u primjeru 2 koncentrišemo na podgraf koji sadrži 15 vrhova dobijenih od 15 timova u jednoj od grupa, u tom (pod)grafu bismo imali 15 vrhova od kojih svaki ima stepen 11, a to je nemoguće. Otuda, ne može se napraviti traženi raspored.

3. INTERPRETACIJA ZADATKA NA JEZIKU GRAFOVA

Primjer 3: U skupu od 10 osoba, svaka osoba poznaje tačno 4 osobe. Da li je moguće ove osobe podijeliti u dvije grupe od po 5 osoba tako sa se unutar grupe svi međusobno poznaju?

Posmatrajmo graf G od 10 vrhova: $v_1, v_2, \dots, v_{10}$ pri čemu vrhovi predstavljaju osobe. Dva vrha u grafu su susjedna ako se odgovarajuće osobe poznaju. Primijetimo da smo na ovaj način dobili 4- regularan graf od 10 vrhova. Pretpostavimo dalje da je odgovor u zadatku potvrdan i da smo dobili tražene dvije grupe. Tada se vrh v_1 mora nalaziti u jednoj od ove dvije grupe. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je to prva grupa. Kako se u toj grupi svi međusobno poznaju to su preostala četiri vrha iz te grupe zapravo susjedi vrha v_1 u posmatranom grafu G. Ponovo bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da su to vrhovi v_2, v_3, v_4 i v_5. S obzirom na to da je G 4- regularan graf, to vrh v_1 nema susjeda među vrhovima u drugoj grupi. Sličnim razmatranjem zaključujemo da ni vrhovi v_2, v_3, v_4 i v_5 nemaju susjede u drugoj grupi vrhova. Dakle, ukoliko je odgovor potvrdan na postavljeno pitanje u zadatku tada graf G mora biti 4- regularan nepovezan graf sastavljen od dvije komponente pri čemu je svaka komponenta kompletan graf od 5 vrhova (Slika 1. a)). Kimberley (vidjeti [3] i [4]) je koristila GENREG za nabrajanje 4-regularnih grafova do reda 22 u 2011. te je dobila da postoji 59 povezanih 4 – regularnih grafova od 10 vrhova. Jedan takav graf je dat na Slici 1. b). Otuda zaključujemo da nije uvijek moguće podijeliti osobe u grupe na gore opisan način.

a) b)



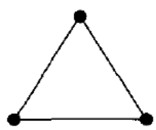
*Slika 1*1

Vidimo da što se tiče interpretacije problema na jeziku grafova, odnosno iskazivanje zadanog problema na drugi način, to je lakši dio u procesu rješavanja. Bitno je odmah na početku uvesti jedan ili više grafova (podgrafova), odrediti (definisati) vrhove i ivice, a nakon toga analizirati stepene vrhova, susjedne vrhove, itd.

Primjer 4: Na jednom takmičenju se desilo da svaki učenik zna tačno 10 drugih takmičara, ali da se ne mogu naći nikoja tri takmičara, tako da se u toj skupini svi međusobno poznaju. Dokazati da je na tom takmičenju bilo barem 20 osoba.

Da bismo riješili ovaj zadatak, posmatrajmo graf u kome svakom vrhu odgovara jedan takmičar, a dva vrha su susjedna ako se odgovarajući takmičari (predstavljeni tim vrhovima) poznaju. Očito je broj vrhova n nepoznat. Za taj graf bi onda mogli naglasiti sljedeće:

1) Svaki vrh tog grafa ima stepen 10
2) Graf ne sadrži kao svoj podgraf ciklus C_3 (trougao).



C_3

*Slika 2*1

Neka je $e = uv$ bilo koja ivica grafa G. Pošto je $d(u) = d(v) = 10$, vrh u ima kao svoje susjede, osim vrha v, vrhove $u_1, u_2, \dots, u_9$, a neka vrh v ima kao svoje susjede vrhove

$u, v_1, v_2, \dots, v_9$. Tvrdimo da je $u_i \neq v_j$ za sve indekse $i, j \in \{1,2, \dots, 9\}$. Naime, ako bi za neke $i, j \in \{1,2, \dots, 9\}$ vrijedilo $u_i = v_j$, tada bismo imali ciklus dužine 3: uu_ivu, a to je nemoguće. Zato je $n \geq 20$.

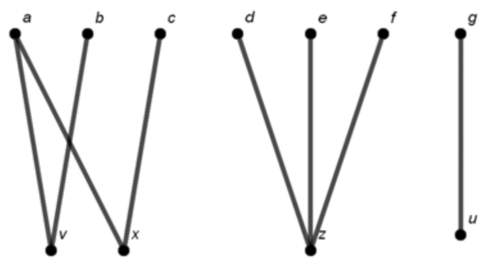
Primjer 5: U jednom društvu je bilo 7 sportista. Svaki od njih trenira najviše dva sporta. Dokazati da među njima postoje trojica koji treniraju isti sport ili da nikoja dva od te trojice ne treniraju isti sport.

Ovaj zadatak ćemo riješiti pomoću pojma bipartitnog grafa. Skup vrhova bipartitnog grafa je uvijek unija dva disjunktna skupa V_1 i V_2, tako da jedan vrh svake ivice u tom grafu bude u skupu V_1 a drugi iz V_2. Posmatrat ćemo bipartitni graf, tako da je $|V_1| = 7$, tj. vrhove biramo na način da se svakom sportisti pridruži jedan vrh grafa. Drugi skup vrhova formiramo prema sportovima koje sportisti treniraju, ali pošto ne znamo koliko ih ima, ne možemo znati broj vrhova u skupu V_2. Međutim, možemo reći da svaki vrh iz skupa V_1 ima stepen 1 ili 2. Tada treba dokazati da postoje tri vrha iz skupa V_1 koji imaju zajedničkog susjeda u skupu V_2 ili da nikoja dva od ta tri vrha nemaju zajedničkog susjeda u skupu V_2.

1) Za proizvoljni vrh $a \in V_1$ i njemu susjedni vrh $v \in V_2$, ukoliko bismo našli još dva vrha, $b, c \in V_1$ koji su susjedi sa vrhom v, imamo prvu od predviđenih situacija, tj. tri vrha iz skupa V_1 koji imaju zajedničkog susjeda u skupu V_2.

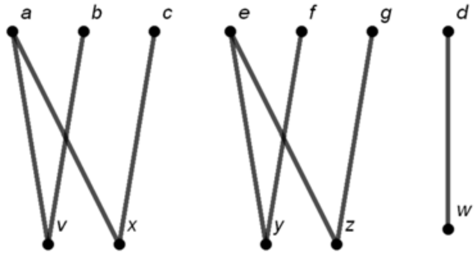
Slika 31

2) U suprotnom, mogu se naći barem 4 vrha iz skupa V_1 koji nemaju zajedničkog susjeda sa vrhom a. Naime, vrh a je susjed sa vrhom v i (eventualno) vrhom $x \in V_2$, pa bi neki vrh b (različit od vrha a) iz V_1 mogao biti susjed sa v, a neki vrh $c \in V_1$ (različit od vrhova a i b) bi mogao biti susjed sa vrhom x. U toj situaciji, ako ne želimo da imamo slučaj 1) ostanu nam 4 vrha iz skupa V_1 koji nemaju zajedničkog susjeda sa vrhom a. Neka su to npr. vrhovi d, e, f, g. Jedna od opcija koja se može desiti je da se među njima mogu naći 3 koji imaju zajedničkog susjeda u skupu V_2. Dokaz je tada završen.



Slika 41

3) Ako se među vrhovima d, e, f, g ne mogu naći nikoja 3 koja imaju zajedničkog susjeda, tvrdimo da među njima postoji jedan, neka je to vrh d, koji nema zajedničkog susjeda sa vrhom e**.** Naime, ako je vrh e susjedan sa vrhovima $y, z \in V_2$ i ako je npr. $f \sim y, g \sim z$ (ili $f \sim z, g \sim y$), susjedstvo vrha d sa vrhom y ili z nas vodi do situacije 1). Pošto vrhovi d i e iz skupa V_1 nemaju zajedničkih susjeda, a takođe vrh a nema zajedničkih susjeda sa ta dva vrha, onda smo našli 3 vrha: a, d, e koji nemaju zajedničkog susjeda u skupu V_2.



*Slika 5*1

Primjer 6: Da li je moguće formirati grupu od 35 osoba u kojoj svaka osoba poznaje tačno 20 osoba, bilo koje dvije osobe koje se ne poznaju imaju tačno 20 zajedničkih poznanika a bilo koje dvije osobe koje se poznaju imaju ili 6 ili 3 zajednička poznanika?

U radu [5] proučavana je posebna klasa grafova koju su autori nazvali CDRG-grafovi. Ovdje ćemo navesti definiciju tog grafa:

Za k-regularan graf G s n vrhova kažemo da je *CDRG*-graf s parametrima $(n, k, \mu;\ \lambda_1, \dots, \lambda_p)$

ako ima sljedeće dvije osobine:

a) bilo koja dva nesusjedna vrha imaju tačno μ ($\mu \in \mathbb{N}_0$) zajedničkih susjeda i
b) bilo koja dva susjedna vrha imaju λ_r zajedničkih susjeda za neki r $(1 \le r \le p)$, pri čemu još vrijedi $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p$.

Primijetimo da ako bismo naš problem preveli na jezik grafova na način kako smo to činili u Primjeru 3, tada bi se problem sveo na posmatranje egzistencije CDRG-grafa s parametrima (35, 20, 17; 6, 3). U spomenutom radu su navedeni uslovi koje parametri $n, k, \mu;\ \lambda_1$ i λ_2 moraju zadovoljavati ako postoji CDRG-graf $(n, k, \mu;\ \lambda_1, \lambda_2)$.

Iz tih uslova slijedi da ovaj graf ne postoji pa je nemoguće sastaviti grupu ljudi na ovaj način.

4. ZAKLJUČAK

Teorija grafova se može primijeniti za rješavanje zadataka logičko-kombinatornog tipa tako što se problem iz zadatka predstavi u obliku ekvivalentnog problema u teoriji grafova uz odgovarajuću interpretaciju. Prednost ovakvog pristupa se krije u mogućnosti vizualizacije problema na osnovu koje ga možemo lakše analizirati i doći do traženog rješenja. Nakon što riješimo zadatak (problem) u teoriji grafova, vraćamo se na polaznu postavku i interpretiramo rješenje u skladu s postavljenim zadatkom.
Ovdje smo pokazali kako se teoremi, koji su rezultati novijih istraživanja iz oblasti teorije grafova, mogu primijeniti za rješavanje konkretnih logičkih problema koji opet imaju svoju primjenu u sferi društvenih (računarskih) mreža. Također smo pokazali prilikom rješavanja

jednog zadatka na koji način možemo koristiti postojeću bazu grafova s određenim osobinama, koja je dostupna na internetu.

Neki od problema koje smo postavili u ovom radu se mogu koristiti za dodatnu nastavu iz matematike u srednjoj pa i u osnovnoj školi, što bi svakako bila inovacija u nastavi matematike, pošto teorija grafova nije zastupljena u postojećim nastavnim planovima i programima matematike. No glavni cilj rada je bio dati poveznicu teorije grafova i logičko-kombinatornih problema te ukazati koliko je teorija grafova moćan alat za rješavanje ovakvih problema.

Nije izvodljivo pokazati puni potencijal ovog alata kroz dodatnu nastavu u osnovnim i srednjim školama, zbog obimnosti i složenosti teorije. Također, ovim radom želimo ukazati da bi bilo izuzetno korisno proširiti kurikulume na dodiplomskim i postdiplomskim studijima na visokoškolskim ustanovama, prvenstveno na matematičkim i tehničkim fakultetima, tako da se ovoj oblasti da više prostora.

5. REFERENCE

[1] Almir Huskanović, Hermina Alajbegović: Diskretna matematika, Politehnički fakultet Univerziteta u Zenici, 2020., COBISS.BH-ID 29065990

[2] Domagoj Kovačević, Darko Žubrinić: Uvod u diskretnu matematiku, Element, ISBN: 953-197-536-1, Zagreb, 2018.

[3] http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/markus/reggraphs.html#CRG

[4] OEIS Foundation Inc. A006820 in the On-Line Encyclopaedia of Integer Sequences. Available online: https://oeis.org/A006820 (accessed on 6 August 2019)

[5] Safet Penjić, Hermina Alajbegović, Almir Huskanović, Neke osobine parametara cdrg-grafova (Some properties of parameters of cdrg-graphs), *Zbornik radova Filozofskog fakulteta*, 2021

[6] Štefko Miklavič, Dževad Zečić, Hermina Alajbegović, Almir Huskanović: Teorija grafova i primjene, *saZnanje,* ISSN 2566-4387, str. 272. – 275. Zenica 2018.

[7] Zoran Mitrović, Snježana Maksimović: Diskretna matematika, Elektrotehnički fakultet u Banjaluci, ISBN 978-99955-46-26-7, Banjaluka, 2016.