

STATIČKA ANALIZA PRAVOUGAONIH ARMIRANO–BETONSKIH PLOČA SA ZATEGAMA

STATIC ANALYSIS OF RECTANGULAR REINFORCED CONCRETE SLABS WITH TIE RODS

v. ass. mr. Nermin Redžić
Univerzitet u Zenici
Bosna i Hercegovina

v. ass. mr. Vahid Redžić
Univerzitet u Zenici
Bosna i Hercegovina

v. ass. mr. Emir Đulić
Univerzitet u Zenici
Bosna i Hercegovina

REZIME

Kombinacija sistema punih nosača i zatega se može primijeniti i kod pravougaonih ploča. Na taj način se mogu premoštavati veći rasponi nego kod običnih armirano-betonskih ploča a samim tim se dobija na funkcionalnosti prostora na nivou etaže bez dodatnih vertikalnih konstruktivnih elemenata. U radu je data numerička analiza pravougaone armirano-betonske ploče sa zategama. Također napravljena je usporedba vrijednosti momenata savijanja, momenata torzije i ugiba u odnosu na ploču bez zatega. Tokom analize primjetno je smanjenje vrijednosti navedenih parametara.

Ključne riječi: numerička analiza, armirano-betonska ploča, zatega, metoda konačnih elemenata

ABSTRACT

The combination of a system of girders and tie rods can also be used with rectangular slabs. In this way, larger spans can be bridged than with ordinary reinforced concrete slabs, and thus the functionality of the space on the floor level is obtained without additional vertical constructive elements. The paper presents a numerical analysis of a rectangular reinforced concrete slab with tie rods. A comparison was also made with the values of bending moments, torsional moments and deflections in relation to the slab without tie rods. During the analysis, a noticeable decrease in the values of the mentioned parameters was observed.

Keywords: numerical analysis, reinforced concrete slab, tie rod, finite element method

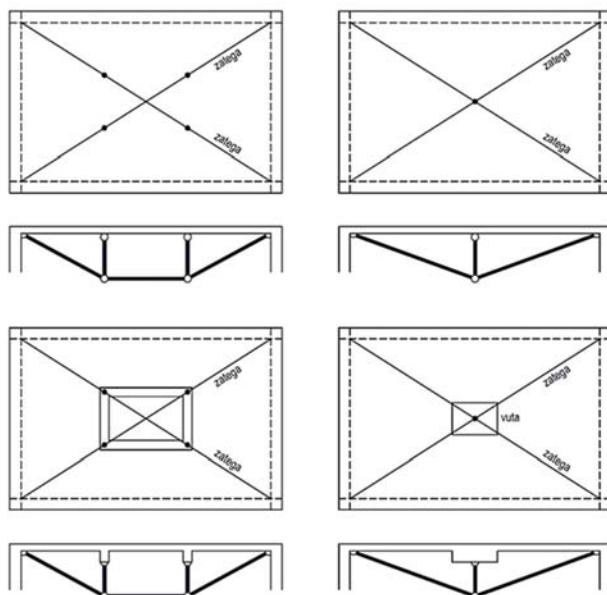
1. UVOD

U teoriji linijskih nosača poznato je da spajanjem dva sistema, od kojih je jedan puni nosač a drugi skup zglobno vezanih prostih štapova, dobijamo konstrukciju koju nazivamo kombinovani sistem, pri čemu takva dva sistema rade zajednički kao jedna cjelina. Svaki od ova dva sistema bi mogao zasebno da primi određena opterećenja, ali zbog nedostatka krutosti i nepomjerljivosti ne mogu prihvatiti bilo kakvo opterećenje. U nastavku ćemo posmatrati takve

kombinovane sisteme gdje se u prostim štapovima javljaju sile zatezanja, tj. zatege se nalaze ispod grede za ukrućenje. Ponašanje punih nosača i zatega pod opterećenjem je različito. Kod punih nosača dolazi do savijanja, dok se kod zatega javlja istežanje štapa pod opterećenjem. Ovakva kombinacija sistema punih nosača i zatega može se primijeniti i kod pravougaonih ploča. Na taj način se mogu premoštavati veći rasponi nego kod običnih armirano-betonskih ploča a samim tim se dobija na funkcionalnosti prostora na nivou etaže bez dodatnih vertikalnih konstruktivnih elemenata.[1] Veza između ploče i vertikalnog štapa koji je pritisnut mora se tako konstruisati da ne bi došlo do probijanja ploče. U tu svrhu se uglavnom konstruiše vuta na mjestu veze ili se rade ortogonalne armirano-betonske grede koje se sijeku na mjestu spoja s vertikalnim pritisnutim štapom. Obzirom da se sistem zatega i pritisnutih štapova nalazi ispod pravougaone ploče, iz estetskih razloga se vrši "skrivanje" konstrukcije spuštenim stropom.

2. PRORAČUN PRAVOUGAONE PLOČE ZA ZATEGAMA

Upotrebom ojačanih pravougaonih ploča uveliko se smanjuju statički i deformacijski uticaji u odnosu na ploču bez zatega. Pri tome treba voditi računa o uglu koji zatvara zatega sa horizontalnom osom kao i o detaljima veza linijskih i površinskih elemenata. Pravilnim odabirom ugla koji zatega zatvara sa horizontalnom osom postiže se povoljnija preraspodjela presječnih sila. Na osnovu izvjesnih istraživanja došlo se do zaključka da taj ugao ne bi trebao biti manji od 10° . [1] Neka moguća rješenja pravougaonih ploča sa zategama prikazana su na slici 1. Zatege se mogu konstruisati u dva ortogonalna pravca ili u dva dijagonalna pravca. Pravilnija dispozicija zatega je u dijagonalnim pravcima iz razloga što se u uglovima slobodno oslonjene pravougaone ploče javljaju sile odizanja u iznosu $R = 2 \cdot M_{xy}$, kao posljedica momenata torzije M_{xy} koji su maksimalni u uglovima ploče. Zategu je u uglovima ploče potrebno usidriti, a u čvoru u kome se povezuje sa vertikalom obezbijediti što manje trenje između zatege i veze vertikalne.



Slika 1. Varijante pravougaonih ploča sa zategama

Proračun pravougaonih armirano-betonskih ploča sa zategama najprikladnije je vršiti primjenom metode konačnih elemenata. Pri tome se vrši diskretizacija ploče na površinske konačne elemente te pritisnutih štapova i zatega na linijske konačne elemente. Područje je podijeljeno na niz dijelova, elemenata i svaki element je posmatran kao posebna rubna zadaća

koju rješavamo Ritz - ovom metodom. Rubni uslovi su ujedno bile i nepoznate na krajevima elemenata. Koordinatne funkcije su odabrane tako da su te nepoznate na krajevima elemenata koeficijenti linearne kombinacije koordinatnih funkcija. Zbog uslova kompatibilnosti i uklapanjem svih elemenata u jednu cjelinu proizilazi sistem jednačina sa nepoznatim pomjeranjima u tačkama između elemenata (čvorovima). Problem savijanja ploča jedan je od prvih problema koji je bio analiziran na početku razvoja metode konačnih elemenata. Na ovaj problem je bila prvi put primijenjena mješovita formulacija konačnog elementa.[7] Osnovna karakteristika mješovitih elemenata je to što se u elementu javljaju pomjeranja i sile kao primarne nepoznate istovremeno, tj. mješovite veličine. Prvi mješoviti element za analizu ploča bio je trougaoni, sa linearnom promjenom momenata. Kasnije je razvijen trougaoni element sa konstantnim momentima u elementu. Taj element, i pored toga što je grublji, davao je nešto bolje rezultate od prethodno pomenutog. Osim toga, česta je upotreba pravougaonog elementa sa linearnom promjenom momenata u jednom pravcu i konstantnim u drugom pravcu.

3. PRIMJENA METODE KONAČNIH ELEMENATA

U samim počecima razvoja metode konačnih elemenata proračuni su temeljeni na metodi sila, gdje su nepoznate bile sile u oslobođenim vezama. Takav pristup nije mogao pridonijeti razvoju proračuna zbog načina provođenja postupka. Za svaku novu konstrukciju potrebno je provesti niz proračunskih procedura koje su kod složenijih konstrukcija zahtijevale značajan obim proračunskog posla. Iskorak u proračunu konstrukcija dogodio se razvojem metode deformacija gdje su nepoznate translatorska pomjeranja u smjeru koordinatnih osa i uglovi obrtanja definisanih čvorova konstrukcije. Metoda deformacije je zapravo preteča metode konačnih elemenata. Matična formulacija jednačina dodatno doprinosi razvoju numeričkih proračunskih metoda. Potpunim preuzimanjem numeričkih proračunskih postupaka metoda konačnih elemenata se nametnula kao najkvalitetniji aparat za proračun konstrukcija. Varijaciona formulacija, princip virtualnog rada pojavili su se kao podloga za postavljanje teoretskih temelja za metodu konačnih elemenata. Iz tih osnovnih teoretskih postavki proizilazi razvoj matematičke formulacije metode konačnih elemenata.

U numeričkom smislu metoda konačnih elemenata izravno je poboljšanje Ritz - ove metode. Ritz - ova metoda je zbog zahtjeva prema koordinatnim funkcijama bila relativno ograničena. Na glatkim rubnim uslovima rješenja su bila prihvatljiva, ali već kod malo zahtjevnijih slučajeva (djelovanje koncentrisane sile, otvori, i sl.), za dobijanje kvalitetnijih rješenja potrebno je uložiti značajan trud u dobar izbor koordinatnih funkcija. [5] Problem je riješen metodom konačnih elemenata.

Globalna matrica krutosti predstavljena je izrazom:

$$[K] = \sum_{e=1}^N [k]_e \quad (1)$$

gdje je N ukupan broj konačnih elemenata.

Oznaka sume označava da se sabiraju samo članovi lokalnih matrica krutosti po koordinatama, koje odgovaraju globalnim koordinatama. Ako se radi o štapovima pod uglom onda je potrebno izvršiti projiciranje pomjeranja iz lokalnog u globalni koordinatni sistem koristeći matrice transformacije.

Jednačina ravnoteže sistema glasi:

$$[K]\{w\} = -\{F\} \quad (2)$$

Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja konačnog elementa jednak je:

$$\{f\}_e = \int_A [N]^T q \, dA \quad (3)$$

te se za konstantno površinsko opterećenje q , uvrštavanjem funkcija oblika i integracijom dobija:

$$\{f\}_e = q \frac{ab}{3} [3 \quad b \quad -a \quad 3 \quad b \quad a \quad 3 \quad -b \quad a \quad 3 \quad -b \quad -a]^T \quad (4)$$

Globalni vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja:

$$\{F\} = \sum_{e=1}^N \{f\}_e \quad (5)$$

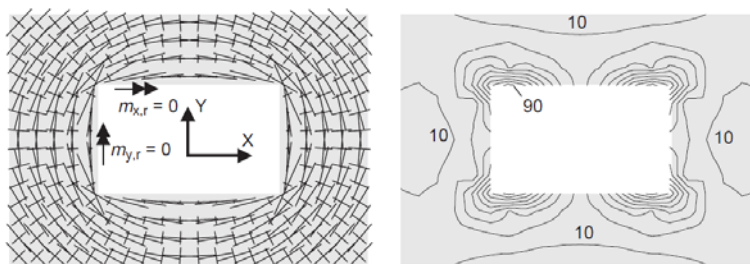
Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja predstavlja sile koje se javljaju u pravcu generalisanih koordinata od vanjskog opterećenja, kada su spriječena pomjeranja po svim stepenima slobode.

Jednačina (3) se može objasniti koristeći princip virtualnog rada, odnosno primjenom Betti – jeve teoreme o uzajamnosti radova.[3] Ovdje opterećenje q i spriječena pomjeranja čvorova čine prvi sistem, dok element koji je podvrgnut samo onim silama koje uzrokuju pomjeranja $[N]$ čini drugi sistem. Prema Betti – jevoj teoremi virtualni rad sila prvog sistema na odgovarajućim pomjeranjima koja su izazvana silama drugog sistema, jednak je virtualnom radu sila drugog sistema na odgovarajućim pomjeranjima izazvanim silama prvog sistema.[2] Dakle, drugi član je jednak nuli jer u drugom sistemu imamo sile samo u čvorovima, a čvorna pomjeranja u prvom sistemu su jednaka nuli. U izrazu (3), funkcija oblika deformacije $[N]$ se tretira kao uticajna linija (ili uticajna površina) od sile u čvoru i .

Osim ACM#Adini, Clough i Melosh) elementa, u analizi ploča koriste se i neki drugi konačni elementi. Tako se za tanku savijenu ploču može koristiti pravougaoni hermitski BFS konačni element (Bogner, Fox i Schmit) sa četiri čvora. Osim pravougaonih elemenata mogu se koristiti i tanki trougaoni konačni elementi sa 9 stepeni slobode kretanja (3 translacije i 6 obrtanja). Za debele ploče, koje se analiziraju prema Reissner – Mindlinovoj teoriji, obično se koristi debeli pravougaoni HTK konačni element (Hughes, Taylor i Kanoknukulcha) sa četiri čvora i 12 stepeni slobode, te debeli trougaoni konačni element sa 9 stepeni slobode kretanja. [8]

Globalna matrica krutosti sistema $[K]$ je singularna matrica, tj. nema inverznu matricu sve dok se ne uvedu odgovarajući granični uslovi.[11] Kod ploča i drugih površinskih nosača, problem singularnosti se ogleda u pojavi beskonačnih napona i presječnih sila usljed djelovanja koncentrisanog opterećenja visokog intenziteta. Treba imati na umu da se ovaj problem javlja u numeričkom modelu kao posljedica određenih pojednostavljenja i pretpostavki o ponašanju elementa. Na primjer, pretpostavka o linearnoj raspodjeli deformacija po debljini ploče nije prihvatljiva u područjima slobodnog oslanjanja. U realnoj konstrukciji se nikako ne mogu javiti naponi i presječne sile beskonačnog intenziteta. U armirano-betonskoj ploči, usljed vanjskog opterećenja, na zategnutoj strani će se u određenom trenutku formirati naprsline. Visoke vrijednosti sila koje se dobiju analizom konstrukcije primjenom MKE u područjima singulariteta, ne postoje na stvarnoj konstrukciji i prema tome ne bi se trebale uzimati u obzir u daljem proračunu (dimenzioniranju) konstrukcije. Dakle, svaki korisnik ove metode treba biti upoznat sa ovim problemima da bi na adekvatan način mogao izvršiti interpretaciju dobijenih rezultata. [9]

Kada je riječ o pločama, problem singularnosti se može javiti na mjestima otvora za određene instalacije, na mjestima djelovanja koncentričnih sila, kod diskontinuiranih linijskih oslonaca, kod slučajeva direktnog oslanjanja ploče na vertikalni linijski element i sl. Prikaz glavnih momenata savijanja i transverzalnih sila u području otvora ploče dat je na slici 2.

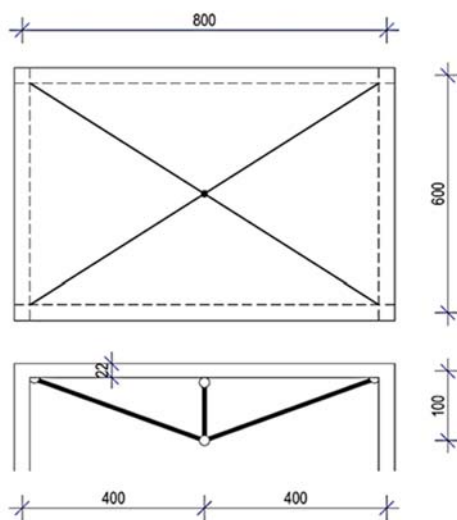


Slika 2. Glavni momenti savijanja i transverzalne sile u području otvora [9]

Prema tome, cilj numeričkog proračuna je da se odrede korektnje vrijednosti svih traženih uticaja jer su samo realne vrijednosti mjerodavne za dimenzioniranje elemenata konstrukcije.

4. NUMERIČKI PRIMJER

U numeričkom primjeru pravougaone ploče sa zategama izvršena je analiza presječnih sila i ugiba ploče za različite raspone ploče u dva ortogonalna pravca. Odabrani su sljedeći rasponi ploče: 8x6 m, 9x7 m i 10x8 m. Proračun je rađen u programskom paketu Radimpex Tower. Debljina ploče u sva tri slučaja iznosi $h=22$ [cm]. Sila prednapreznja u zategama iznosi $F_p = 80$ [kN]. Za tri različita raspona pravougaone ploče izvršio se poređenje rezultata proračuna a na kraju će se dobijeni rezultati uporediti i sa konstrukcijom ploče bez zatega.



Slika 3. Dispozicija pravougaone ploče sa zategama

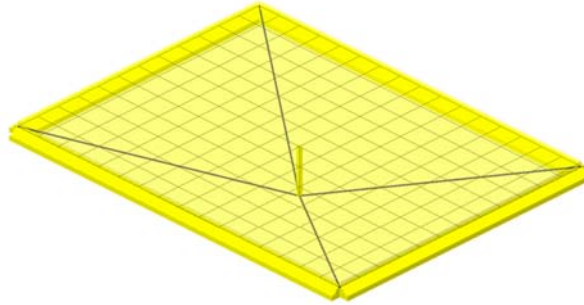
OPTEREĆENJE:

- stalno – težina slojeva $g = 1,5$ [kN/m²]; sopstvena težina ploče uračunata u software-u
- promjenljivo – $q = 3,0$ [kN/m²]

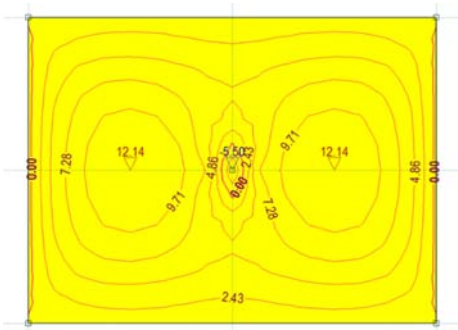
MEHANIČKE I GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE:

- ploča: $E = 3 \cdot 10^7$ [kN/m²]; $h = 22$ [cm]
- zatege: $E = 2,1 \cdot 10^8$ [kN/m²]; $\Phi 32$ mm
- vertikalna: $E = 2,1 \cdot 10^8$ [kN/m²]; HOP 80 x 80 x 5 mm

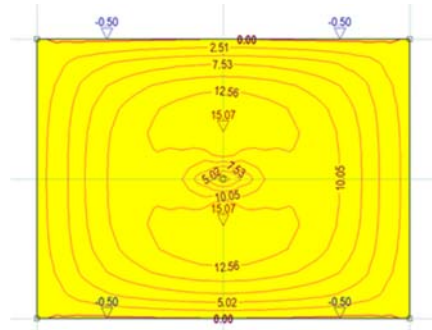
U nastavku će biti prikazani rezultati proračuna za slučaj pravougaone ploče sa zategama raspona 8x6 m i rezultati za iste rasponne kada nema zatega, dok će preostala dva slučaja biti prikazana u tabeli 1.



Slika 4. Mreža konačnih elemenata



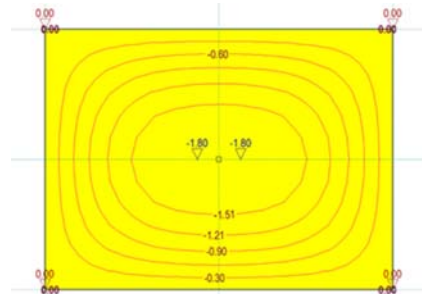
Slika 5. Momenti savijanja u ploči M_x [kNm/m]



Slika 6. Momenti savijanja u ploči M_y [kNm/m]

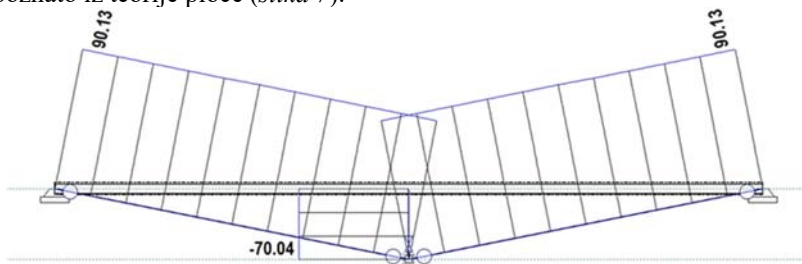


Slika 7. Momenti torzije u ploči M_{xy} [kNm/m]



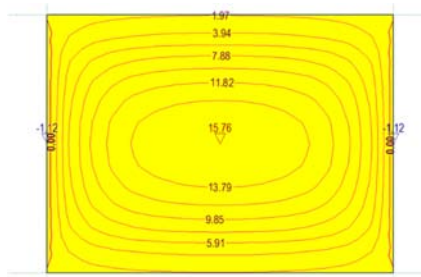
Slika 8. Prikaz ugiba ploče w [mm]

Na slici 5 se može primijetiti pojava negativnih momenata savijanja $M_x = -5,5$ [kNm/m] na mjestu spoja ploče s vertikalnim pritisnutim štapom. Maksimalne i minimalne vrijednosti momenata torzije $M_{xy} = \pm 12,23$ [kNm/m] se javljaju u uglovima slobodno oslonjene ploče, što je opšte poznato iz teorije ploče (slika 7).

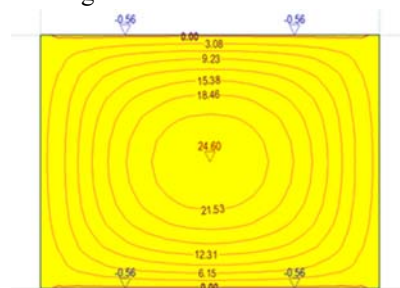


Slika 9. Normalne sile u prostim štapovima [kN]

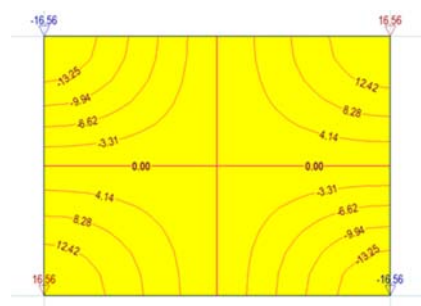
U nastavku će biti prikazani uticaji u ploči kada nema zatega.



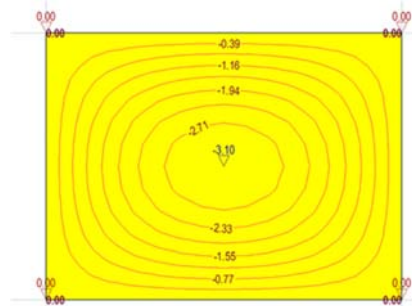
Slika 10. Momenti savijanja u ploči bez zatega M_x [kNm/m]



Slika 11. Momenti savijanja u ploči bez zatega M_y [kNm/m]



Slika 12. Momenti torzije u ploči bez zatega M_{xy} [kNm/m]



Slika 13. Prikaz ugiba ploče bez zatega w [mm]

Svi uticaji u ploči prikazani su izolinijama koje su se pokazale kao najpogodnije za prikaz statičkih i deformacijskih veličina u površinskim elementima. Izolinije su linije koje povezuju tačke na ploči sa istim intenzitetom (potencijalom). [10] Usporedbom statičkih i deformacijskih veličina evidentan je porast momenata savijanja, momenata torzije i ugiba kod pravougaone ploče bez zatega u odnosu na pravougaonu ploču ojačanu zategama i pritisnutim štapom. Rezultati proračuna za sva tri analizirana raspona ploče prikazani su u tabeli 1. Sila prednapreznjanja u zategama u sva tri slučaja iznosi $F_p = 80$ [kN].

Tabela 1. Rezultati proračuna pravougaone ploče za različite raspone

PLOČA SA ZATEGAMA						
Raspon	$M_{x,max}$ [kNm/m]	$M_{y,max}$ [kNm/m]	$M_{xy,max}$ [kNm/m]	w_{max} [mm]	N_{zatega} [kN]	$N_{vert.štap}$ [kN]
8x6 m	12,14	15,07	12,23	1,80	90,13	-70,04
9x7 m	17,21	22,08	17,86	3,77	97,94	-66,94
10x8 m	23,25	29,97	24,20	6,82	106,60	-64,95
PLOČA BEZ ZATEGA						
8x6 m	15,76	24,60	16,56	3,10		
9x7 m	21,67	31,94	22,11	5,44		
10x8 m	28,47	40,15	28,41	8,90		

5. ZAKLJUČAK

U numeričkoj analizi pravougaone armirano-betonske ploče sa zategama primjetno je smanjenje momenata savijanja, momenata torzije i ugiba u odnosu na ploču bez zatega. To se

posebno odnosi na momente M_y u ploči gdje se javlja prilična razlika, a poznato je da se kod pravougaonih ploča veći momenti savijanja javljaju u pravcu kraćeg raspona (y pravac). Zatege je povoljnije konstruisati u dijagonalnim pravcima obzirom da sile zatezanja u zategama teže da "vrate" uglove ploče u položaj koji su imali prije deformacije. Obzirom da je visina pritisnutog štapa u sva tri slučaja bila ista, povećanjem raspona smanjuju se uglovi koje zatega zatvara sa horizontalnom osom. Na taj način se povećavaju normalne sile u zategama a smanjuju sile pritiska u vertikalnom štapu. Negativni momenti savijanja iznad vertikalnog štapa su se javili kod raspona ploče 8x6 m, dok za preostala dva raspona to nije bio slučaj već je kompletna donja površina ploče bila zategnuta. Osim opterećenja i raspona, svakako da pojava negativnih momenata zavisi i od aksijalne krutosti vertikalnog štapa tako da treba težiti konstruisanju takve veze pritisnutog štapa i ploče da se dobije što povoljnija raspodjela momenata savijanja. Iz numeričkog primjera, tj. tabele 1 vidljivo je smanjenje statičkih i deformacijskih veličina koje iznosi od 25 do 35% ukoliko se konstruišu pravougaone ploče ojačane zategama. Rezultati proračuna zavise i od veličine konačnog elementa gdje se za finiju mrežu konačnih elemenata teži bržoj konvergenciji rješenja. Kod projektovanja ovakvih sistema potrebno je posvetiti veliku pažnju detaljima spojeva linijskih elemenata sa pločom. Sila pritiska velikog intenziteta u vertikalnom štapu može izazvati probijanje ploče pa bi to trebalo spriječiti određenim konstruktivnim zahvatima (vute, armatura protiv probijanja, ortogonalne grede i sl.), da bi konstrukcija zadovoljila uslove nosivosti i upotrebljivosti.

6. REFERENCE

- [1] Demirović, B.; Požegić, Z.; Osmić, N.: "Proračun i konstruisanje armirano-betonskih ploča sa zategama", Zbornik - Razvoj i modernizacija proizvodnje RIM 2017, str. 435, oktobar 2017.
- [2] Demirović, B.: "Statika konstrukcija I – Puni nosači u ravni", Štamparija Fojnica, Fojnica, 2016.
- [3] Ghali, A.; Neville, A.M.; Brown, T.G.: "Structural Analysis", Spon Press, London – New York, 2009.
- [4] Hajdin, N.: "Teorija površinskih nosača - ploče napregnute na savijanje", Naučna knjiga, Beograd, 1989.
- [5] Meštrović, M.: "Metoda konačnih elemenata" - skripta, Građevinski fakultet Zagreb
- [6] Petyt, M.: "Introduction to Finite Element Vibration Analysis", Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [7] Poceski, A.: "Mešoviti metod konačnih elemenata", Građevinska knjiga, Beograd, 1990.
- [8] Rades, M.: "Finite Element Analysis", Printech, Bucharest, 2006.
- [9] Rombach, G.A.: "Finite-element Design of Concrete Structures", ICE Publishing, London, 2011.
- [10] Tower 6: "Uputstvo za rad sa programom", Radimpex, Beograd
- [11] Zaimović-Uzunović, N.; Lemeš, S.: "Metod konačnih elemenata", Dom štampe, Zenica, 2002.